Affine Quantum Groups and Quantum Spin Chains

AUTHOR(S):

加藤, 晃史

Affine Quantum Groups and Quantum Spin Chains

東大数理科学研究科・加藤晃史

1. Introduction

Yang-Baxter 方程式の発見以来、可解模型の研究はこの方程式の解を構成する事に力点が置かれ、今では無限に多くの解 (= 可解模型) が知られるようになった。ひとたび Yang-Baxter の解がわかると、free energy や 1 点関数はあとは比較的定まった方法で求めることができる。しかし、「可解」を標榜する以上、任意の相関関数まで求まって欲しいのが人情である。人々のこのような願いは長い間 Ising model でしか叶えられなかった。

よく知られているように、臨界点直上の gapless の励起は共形場理論によって記述される。この理論は可解であり、任意の相関関数が計算可能であるが、それには

- 系が Virasoro (もしくは affine Lie algebra) という無限次元の対称性で統制されている。
- この対称性は、内部対称性と外部対称性 (時空の対称性) を関係させる。
- 一次元量子論として見たときの Hilbert 空間は、この対称性の無限次元既約表現の有限個の直和に分解できる。

という事情が本質的であった。

可解格子模型でも、同様のことを期待してはいけないのだろうか？ただし、可解格子模型は一般に gap を持つので、共形変換を生成する Virasoro 代数は系の対称性ではありえない。一方、量子群が Yang-Baxter と密接に関係していることは、その出自から明かであったので、対称性の候補として量子群に注目が集まったのは当然であった。しかし、有限次元の対称性にとどまっている限り、上のような意味での可解性には役者不足の感は否めなかった。

1992 年になって、spin 1/2 の反強磁性 XXZ スピン鎖に関しては、$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と呼ばれる無限次元の affine 型の量子群がまさに欲しい対称性であることが明らかにされた。この量子群の作用は無限に長いスピン鎖のときに初めてきちんと定義できるという事情が、これまでなかなか表舞台に登場しなかった理由の一つであろう。この対称性の発見により、Hamiltonian の対角化、n 点相関の計算などが、純粋に表現論の枠内で遂行可能になり、我々は本当の意味で可解性を手にしたと言える。このような対称性は、現在までにかなり広いクラスの可解格子模型に対して見いだされている。

この小論では、このような可解系における最近の結果をなるべく物理的に理解しやすい形で紹介する。そのため、代数的な用語法に少し厳密性を欠くかも知れないので、更に詳しく知り

たい方は、原論文 [1, 2, 3, 4] を参照してほしい。もちろん、このような代数的な手法は可解性をとことんまで追求した結果であって、物理的な適用範囲という意味では万能ではないが、大きな進歩であると考えられる。

2. XXZ spin chain と量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 対称性

ここではまず、量子群が量子スピン鎖の対称性であることの意味を、有限次元の量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合から説明しよう。

最も簡単な量子スピン系のモデルとして、1 次元の spin 1/2 Heisenberg model (XXX model) を考える。その Hamiltonian は

$$H_{XXX} = -\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}}(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)$$

で与えられる。ただし、σ_i^α $(\alpha = x, y, z)$ は i 番目のスピンの空間 ($|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ で張られる 2 次元空間 V) に働く Pauli 行列である。このモデルは、スピン空間の回転に関して不変で、系は global な $SU(2)$ の対称性を持っている。すなわち、無限小回転の生成子

$$S^x = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_i^x, \qquad S^y = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_i^y, \qquad S^z = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}}\sigma_i^z \tag{1}$$

と Hamiltonian は交換する：

$$[S^x, H_{XXX}] = [S^y, H_{XXX}] = [S^z, H_{XXX}] = 0.$$

従って、H_{XXX} のエネルギー固有値は、$SU(2)$ の多重項をなし、spin j の状態は $2j+1$ 重縮重する。

今度は、一軸異方性を持たせた XXZ model

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}}(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \Delta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)$$

を考えてみよう。すると、

$$[S^x, H_{XXZ}] \neq 0, \qquad [S^y, H_{XXZ}] \neq 0, \qquad [S^z, H_{XXZ}] = 0$$

となるため、系の対称性は $SU(2)$ から z 軸まわりの回転の $U(1)$ に落ち、スペクトルの縮退が解けると思われる。ところが、実際には、$\Delta = 1$ で存在していた縮退が、$\Delta \neq 1$ でも残るのである！ (系のサイズが有限の場合には、両端のスピンにだけ適当な外場をかける必要があるが。)

この不思議な現象は、$\Delta \neq 1$ の XXZ スピン鎖が、普通のリー群の対称性は失うが、量子群の対称性を持っていることから説明できる。いま、

$$\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2}$$

で q というパラメータを導入しよう。そして、S^z、S^+、S^- を以下のように再定義する:

$$
\begin{array}{rcllllllllllll}
S^z & = & \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}} & \cdots & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \sigma_i^z & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \mathbf{1} \otimes \cdots \\
S^+ & = & \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}} & \cdots & \otimes & q^{\sigma_{i-2}^z} & \otimes & q^{\sigma_{i-1}^z} & \otimes & \sigma_i^+ & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \mathbf{1} \otimes \cdots \\
S^- & = & \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbf{Z}} & \cdots & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \mathbf{1} & \otimes & \sigma_i^- & \otimes & q^{-\sigma_{i+1}^z} & \otimes & q^{-\sigma_{i+2}^z} \otimes \cdots \\
\mathcal{H}_{phys} & = & & \cdots & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & V & \otimes & V \otimes \cdots
\end{array}
\tag{2}
$$

比較のために、これらのオペレータが作用するスピンの空間 $\mathcal{H}_{phys}$ もあわせて書いておいた。S^+ や S^- には、XXX の場合にはなかった $q^{\pm\sigma^z}$ の「ひも」が左右に伸びていることに注意しよう。これは、Ising model を free fermion 系にマップするときに用いる Jordan-Wigner 変換に似ている。

簡単な計算により、これらは H_{XXZ} と可換であること

$$[S^+, H_{XXZ}] = [S^-, H_{XXZ}] = [S^z, H_{XXZ}] = 0$$

が確かめられる。また、これら相互の交換関係は

$$
\begin{aligned}
[S^z, S^\pm] &= \pm S^z \\
[S^+, S^-] &= \frac{q^{2S^z} - q^{-2S^z}}{q - q^{-1}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となることも示すことができる。交換関係の右辺が生成子の線型結合でないので、S^z, S^+, S^- はもはやリー代数をなさないが、閉じたある代数構造を定めていることには変わりがない。特に、$q \to 1$ の極限をとると、この交換関係は $SU(2)$ のリー代数 $\mathfrak{sl}_2$ に戻る。このような代数構造は量子群と呼ばれ、数理物理では非常にポピュラーな研究対象である。式 (3) は実は、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と呼ばれる量子群の定義関係式にほかならない。

量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論は詳しく研究されていて、リー代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現論と非常に似ていることがわかっている。たとえば、S^z を対角化した spin j 表現は $2j+1$ 次元既約表現であり、表現のテンソル積 (スピンの合成) 則である Clebsch-Gordan の法則も、(係数が q 依存性を持つことを除けば) そのまま成り立つ。

従って、エネルギースペクトルにも XXX model と全く同様の議論が通用する。いまは量子群の generator が H_{XXZ} と可換であることから、Hilbert space $\mathcal{H}_{phys}$ (スピンの配位の空間) は、H_{XXZ} の固有空間に分解され、さらに各固有空間が $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の既約表現 (多重項) に分解される。従って $q=1$ の縮退がそのまま $q \neq 1$ にも引き継がれることがわかる。

量子群 (quantum groups) の名前は、$q = e^\hbar$ と思ったとき、古典リー環 ($\hbar = 0$) を量子化 ($\hbar \neq 0$) したものという発想に由来している。ただし、我々が今考えている XXZ model

の立場では、$q \to 0$ が classical な Ising model になる極限なので、q 自身が量子補正の大きさを表す Planck 定数の役割を果たしていることに注意する。

3. Affine 量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と XXZ model

前節の議論により、XXZ モデルが XXX モデルと同じ縮重度を保つことは理解できたが、エネルギースペクトルの値そのものは、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の対称性からは求められない。それを対称性の議論から求めたければ、どうしても H_{XXZ} と非可換な operator も含むような代数の構造を考えなくてはならない。

これはちょうど、$1+1$ 次元の Wess-Zumino-Witten モデルにおいて、古典的なリー代数の対称性からは L_0 の固有値 (スケーリング次元) が求まらず、それを無限次元化したカレント代数 (= affine Kac-Moody algebra) の表現論を通してはじめて決定されたことを思い出してみればよい。

XXZ model の場合、「古典的なリー代数」に相当するものが、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ である。これを無限次元化した affine quantum group $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ という代数が存在する。これが欲しい対称性の有力候補だが、果たして XXZ model はその対称性を持つのだろうか？

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は (ベクトル空間としては) 無限次元であるため定義が少し複雑になるが、抽象的には generator $t_i = q^{h_i}$, e_i, f_i $(i=0,1)$ および d で生成される代数で、次の関係式を満たすものとして定義できる：

$$
\begin{aligned}
&t_i t_j = t_j t_i, && [d, e_i] = \delta_{i0} e_i \\
&t_i e_j t_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j && [d, f_i] = -\delta_{i0} e_i \\
&t_i f_j t_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j && [d, t_i] = 0 \\
&[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}} && a_{00} = a_{11} = -a_{01} = -a_{10} = 2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

実は、

$$h_1 = 2S^z, \quad e_1 = S^+, \quad f_1 = S^-$$

という対応で、$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を含んでいる。従って、e_1, f_1, h_1 については Pauli 行列による表示 (2) がそのまま使える。e_0, f_0, h_0 という generator も、e_1, f_1, h_1 の場合と同様にして、Pauli matrix を用いて表現できる。(spin の上下を逆にすればよい。) 以上のことから、e_i, f_i, h_i $(i=0,1)$ はすべて H_{XXZ} であることがわかる。

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ になって本質的に新しい generator は d である。これはどのように表現したらよいだろうか? Foda と Miwa は、d を可解格子業界で有名な corner transfer matrix と同一視してよ

いということを発見した。すなわち、corner transfer matrix を対角化したときの Hamiltonian

$$H_{CTM} = -\frac{q}{1-q^2}\sum_{i\in\mathbf{Z}} i(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \Delta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z) \tag{5}$$

に対し、

$$d = \frac{1}{2}(H_{CTM} - S^z)$$

と定義すると、境界を無視できる無限に長い chain の場合に、これは d としての性質 (4) をみたすのである。ただし、これらの operator の作用が発散を含まず well-defined なものであるためには、系が anti ferro にオーダーしている相になくてはならない。すなわち、$\Delta < -1$ ($-1 < q < 0$) という条件が必要である。こういう条件付きではあるが、affine 量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のすべての generator が spin の言葉で書けた。

それでは、$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ と H_{XXZ} との関係はどうなっているだろうか? d の存在のため、これらはもはや可換ではない。いま、格子をずらす shift operator T を

$$T\circ\sigma_i^\alpha\circ T^{-1} = \sigma_{i-1}^\alpha \qquad (\alpha = x, y, z)$$

と定義すると、(5) より、

$$\frac{q}{1-q^2}H_{XXZ} = T\circ d\circ T^{-1} - d \tag{6}$$

であることがわかる。

以上のことから、affine quantum group $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ に関して、

- d を対角化した表示で $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現論を展開する。
- shift operator T を表現論的にうまく定義する。

ということができれば、少なくとも H_{XXZ} の spectrum を表現論から決定できたことになる。実は、前者については (SU(2) が $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と似ていたように) affine Kac-Moody algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現と類似の結果が知られており、表現の構造は非常によくわかっている。

そこで $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現論から、必要な部分だけを借用しよう。

スピン鎖の議論で活躍する $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の既約表現には大別して次の 2 種類がある。

最高ウェイト表現 (無限次元)	$V(\lambda)$	相互作用している量子多体系の状態
有限次元表現 ($2j+1$ 次元)	$V_z^{(j)}$	一体の波動関数 (local spin)

ここに、λ は表現を特徴付ける highest weight とよばれるものである。無限自由度の系を厳密に扱うには、これら 2 種類の表現を的確に使い分ける必要がある。

いま、無限次元表現に有限次元表現を合成することを考えてみよう。これは、無限多体系に 1 個スピンを付け加えることに相当するから、再び無限多体系の状態の重ね合わせで書けるだ

ろう。すなわち、$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現としての同型

$$V(\mu) \otimes V_z^{(j)} \simeq \bigoplus_{\lambda} V(\lambda) \tag{7}$$

が成り立つはずである。そこで、合成された固有状態が、元の状態のどのような重ね合わせになっているかを考えてみよう。これは

$$\Phi_{\lambda}^{\mu j}(z) : V(\lambda) \longrightarrow V(\mu) \otimes V_z^{(j)} \tag{8}$$

という $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$-linear な写像を考えることに相当する。(表現空間の基底を定めておけば、$\Phi_{\lambda}^{\mu j}(z)$ は行列で表されるから、単に Clebsch-Gordan 係数の無限次元版と考えればよい。) $\Phi_{\lambda}^{\mu j}(z)$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の作用と可換であるという性質で有限次元の場合と同様に特徴付けられる。

$\Phi_{\lambda}^{\mu j}(z)$ は q-Vertex Operator と呼ばれ、affine quantum group の表現論において非常に重要な働きをするものである。物理的には、粒子を多体系に持ち込んだ時の複雑な相互作用の効果を表現しているものと考えてよいだろう。

実は、spin 1/2 XXZ model の場合には、レベルが 1 の最高ウェイト表現 $V(\Lambda_0)$ と $V(\Lambda_1)$ が、また有限次元表現としてはスピン 1/2 の 2 次元表現 $V_z^{(1/2)}$ (以下 V と略記) だけが登場する。この場合には (7) の右辺の和が単項になり、

$$V(\Lambda_0) \otimes V \simeq V(\Lambda_1), \qquad V(\Lambda_1) \otimes V \simeq V(\Lambda_0)$$

という同型対応を与える。これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} & V(\Lambda_0) \\ \simeq\ & V(\Lambda_1) \otimes V \\ \simeq\ & V(\Lambda_0) \otimes V \otimes V \\ \simeq\ & V(\Lambda_1) \otimes V \otimes V \otimes V \\ & \vdots \\ \simeq\ & \cdots \otimes V \otimes V \otimes V \otimes V \otimes V \otimes V \end{aligned} \tag{9}$$

となり、$V(\Lambda_i)$ を半無限スピン鎖の配位空間と同一視してよいことがわかる。より詳しい解析をすると、ふたつの既約表現 $i = 0, 1$ の違いは、無限遠での境界条件が $\cdots \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \cdots$ であるか、$\cdots \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \cdots$ であるかを区別していることがわかる。

こうして、XXZ model の Hilbert space の構造を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現空間として捉え直す準備ができた。両無限のスピン鎖は、半無限鎖をふたつ繋げばいいから、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{phys} &= \bigoplus_{i,j=0,1} V(\Lambda_j) \otimes V(\Lambda_i)^* \\ &= \bigoplus_{i,j=0,1} \mathrm{Hom}\ (V(\Lambda_i), V(\Lambda_j)) \end{aligned} \tag{10}$$

ここに、$V(\Lambda_j)^*$ は、双対表現であり、Hom $(V(\Lambda_i), V(\Lambda_j))$ は空間 $V(\Lambda_i)$ から $V(\Lambda_j)$ への線形写像全体をあらわす。

懸案だった shift operator T は、継ぎ目を 1 つずらす操作であるから、

$$
\begin{aligned}
& (\cdots \otimes V \otimes V \otimes V) \otimes (V \otimes V \otimes \cdots) \\
\simeq\ & (\cdots \otimes V \otimes V) \otimes V \otimes (V \otimes V \otimes \cdots) \\
\simeq\ & (\cdots \otimes V \otimes V) \otimes (V \otimes V \otimes V \otimes \cdots)
\end{aligned}
$$

と考えれば、q-Vertex operator (8) とその dual

$$\tilde{\Phi}^{\lambda}_{\mu j}(z) : V(\mu) \otimes V_z^{(j)} \longrightarrow V(\lambda)$$

の合成

$$T = \tilde{\Phi} \circ \Phi \tag{11}$$

として具体的に表されることがわかる。

また、関係 (10) より、多体系の基底状態 $|\Omega\rangle$ としては、2種の無限次元既約表現に対応して

$$|\Omega\rangle_0 = \mathbf{1}_{V(\Lambda_0)}, \qquad |\Omega\rangle_1 = \mathbf{1}_{V(\Lambda_1)}$$

のふたつが存在する。これは、反強磁性領域では基底状態が2つ存在するという、よく知られた事実に対応する。

また、状態 $\mathcal{H}_{phys} \ni |f\rangle, |g\rangle$ の内積は、

$$\langle f|g\rangle = \mathrm{Tr}_{V(\Lambda)}\, q^{-4\rho} f \circ g \qquad (q^{-4\rho} = q^{-4d} t_1) \tag{12}$$

という形で定義される。無限系であるにもかかわらず、$|q| < 1$ という収束因子のために、内積が well-defined になっていることに注意する。一般に、物理的に異なる相は、表現論的に同値ではありえない。$\Delta < -1$ の XXZ モデルは gap を持ち、XXX モデルは gapless であるが、この理論ではそれが、$|q| = 1$ での発散として見えていることになる。

これまでの枠組みを用いると、H_{XXZ} のスペクトラムは、関係式 (6) , (11) および d と Φ, $\tilde{\Phi}$ の交換関係から求めることができる。結果だけを引用すると、ϵ, p をスピン励起のエネルギーと運動量とするとき、これらの分散関係は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\tau(z) &= e^{-ip(z)} = z^{-1/2} \frac{(qz)_\infty (q^3 z^{-1})_\infty}{(qz^{-1})_\infty (q^3 z)_\infty} \\
\epsilon(z) &= -(q - q^{-1}) z \frac{d}{dz} \log \tau(z)
\end{aligned}
$$

$$(x)_\infty \equiv \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{4n} x)$$

相関関数を求めるには、local operator の多体の波動関数への作用の仕方さえきちんと定義できれば、あとは基底状態における期待値の計算 (12) に帰着される。

いま、local operator が連続した n サイトのスピンに作用する行列 $L\ :\ V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ で表されているとする。問題は、この L を (10) の元にどう作用させるかである。ここでも、(9) にならって vertex operator Φ を繰り返し用いて、無限多体系から local operator L を作用させるのに十分な長さの $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \otimes V$ を引き出し、L をこの空間に（有限サイズの行列として）作用させ、今度は dual vertex operator $\tilde{\Phi}$ を用いて引き出した部分を元の多体状態に戻してやる、という操作を行えば、これが上記の意味で、多体の波動関数への作用の仕方を定義したことになる。

従って、i 番目の基底状態に関する L の期待値は（少し大雑把な記法だが）

$$\begin{aligned}\langle L\rangle_i &\equiv \frac{{}_i\langle\Omega|L|\Omega\rangle_i}{{}_i\langle\Omega|\Omega\rangle_i}\\ &= \frac{\mathrm{Tr}_{V(\Lambda_i)}q^{-4\rho}\tilde{\Phi}\circ\cdots\circ\tilde{\Phi}\circ L\circ\Phi\circ\cdots\circ\Phi}{\mathrm{Tr}_{V(\Lambda_i)}q^{-4\rho}}\end{aligned}$$

で与えられる。最後の式の分母は $V(\Lambda_i)$ の指標にほかならないし、分子は、$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ の表現の自由場表示を用いれば、無限積の多重積分の形で具体的に表すことができる。こうして求められた一点関数などは、別の方法で求められていた結果を再現することも確かめられている。

参考文献

[1] Foda, O., Miwa, T., Corner transfer matrices and quantum affine algebras, Int. J. Mod. Phys A7 Suppl. 1A (1992)279-302.

[2] Davies, B., Foda, O., Jimbo, M., Miwa,T., Nakayashiki, A., Diagonalization of the XXZ hamiltonian by vertex operators. Commun. Math. Phys. 151 (1993) 89-154.

[3] Jimbo, M., Miki, K., Miwa, T., Nakayashiki, A., Correlation functions of the XXZ model for $\Delta < -1$. (hep-th/9205055) 10pp. Dedicated to Chen Ning Yang on occasion of his 70th birthday.

[4] Jimbo, M., Miwa, T., Ohta, Y., Structure of the space of states in RSOS models. Int. J. Mod. Phys. A8 (1993) 1457-1478.